Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$0\times1+1\times2+...+n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

1) Initialisation. La proposition est vraie pour $n=0$:

$$0\times1=0$$

$$\frac{0(0+1)(0+2)}{3}=\frac{0\times1\times2}{3}=0$$

2) Hérédité.

Supposons

$$0\times1+1\times2+...+n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

pour un entier naturel n fixé

et montrons qu'alors

$$0\times1+1\times2+...+(n+1)\times(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

$$0\times1+1\times2+...+(n+1)\times(n+2)$$

$$=0\times1+1\times2+...+n(n+1)+(n+1)\times(n+2)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}$$

$$=\frac{(n+1)[n(n+2)+3(n+2)]}{3}$$

$$=\frac{(n+1)(n^2+5\text{n}+6)}{3}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

3) Conclusion.

D'après le principe de récurrence, on a

$$0\times 1+1\times 2+...+n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

pour tout entier naturel n .